

SUR LA DIMINUTION DE LA RESISTENCE DU FROTTEMENT,

PAR M. EULER.

I.

L'Experience nous ayant fait voir que la force du frottement est toujours égale à une certaine partie de la pression, dont un corps est pressé contre la surface, sur laquelle il se meut, de sorte que le frottement ne dépend ni de la gandeur de la base, dont le corps touche la surface, ni du degré de vitesse, il n'est pas difficile de déterminer l'effet du frottement dans toutes sortes de Machines par le moyen du calcul: vu que le frottement doit être regardé comme une force constante, qui est toujours directement contraire à la direction du mouvement, & qui agit dans une direction, qui passe par le plan de l'attouchement des corps qui se meuvent l'un sur l'autre. Je me bornerai dans cette piece à rechercher l'effet du frottement dans les Machines, dont le mouvement est rotatoire, ou qui se fait autour d'un ou plusieurs axes, & je ferai voir, combien la résistance du frottement peut être diminuée par la diminution des axes, & leur mouvement sur des roulettes: moyens, dont on s'est servi depuis quelque tems avec bien du succés pour perfectionner les machines de cette espece. Il semblera d'abord étrange, que la résistance du frottement, étant toujours égale à une partie determinée de la presion, puisse être diminuée sans diminuer la presion, mais on en reconnoitra bientot la possibilité, lorsqu'on aura égard à la nature du mouvement rota-

toire, par lequel le *momentum* de la force du frottement, duquel dépend la résistence, peut-être diminué autant qu'on voudra.

Fig. 1. II. Je commencerai par considerer la rouë AIK, par laquelle passe le cylindre BLM, qui lui tient lieu d'axe, lequel est soutenu dans la cavité immobile EBF, de sorte que cette rouë ne sauroit tourner autour de son centre C, sans que l'axe BLM ne se frotte sur la surface EBF. La force de ce frottement sera donc égale à une certaine partie de la presſion, dont la machine s'appuye sur la surface EBF, & cette presſion sera égale au poids de la rouë avec son axe, parce que tout ce poids est soutenu par l'appuy EFGH, que la figure ne répresente que d'un coté; mais quoiqu'il se trouve de l'autre coté un semblable appuy, où le frottement est le même, il sera permis de considerer ensemble ces deux frottements comme joints dans le point B. Soit donc le poids de la rouë avec son axe $= P$, qui étant égal à la presſion totale sur l'appuy en B, si nous supposons le frottement à la presſion comme μ à 1, le frottement en B sera $= \mu P$, ou la machine ne pourra être mise en mouvement, sans qu'on surmonte une force appliquée en B $= \mu P$, & dont la direction sera suivant la tangente BQ contraire au mouvement du point P, qu'on veut produire. Soit AP la force, qui soit $= F$, appliquée à l'extremité de la rouë A suivant la tangente AP, que je suppose horizontale, afinque par l'action de cette force la presſion de la rouë sur l'appuy EF ne soit, ni augmentée, ni diminuée; & il est clair pour que la machine puisse être mise en mouvement, que le *moment* de la force F. AC doit surpasser le *moment* du frottement $\mu P. BC$ où il faut qu'il soit $F.AC > \mu P. BC$, ou $F > \mu P. \frac{BC}{AC}$.

III. De là il est clair, que tant que la force $AP = F$ sera plus petite que $\mu P. \frac{BC}{AC}$, elle ne sera pas capable de remuër la machine, & s'il y a $F = \mu P. \frac{BC}{AC}$, la force du frottement sera tout à fait contrebalancée par la force F, de sorte que pour peu qu'on l'augmente, la ma-

la machine ſoit miſe en mouvement. Donc, pour vaincre le frottement dans ce cas propoſé, il faut une force $F = \mu P. \frac{BC}{AC}$, qui ſoit appliquée à la rouë AIK dans une direction horizontale AP, & en même tems perpendiculaire au rayon CA. Si la valeur du coëfficient μ eſt $= \frac{1}{4}$, comme on peut ſuppoſer probablement, on trouvera cette force requiſe pour vaincre le frottement par cette analogie; Comme le rayon AC de la rouë eſt au rayon de l'axe CB, ainſi ſera la quatriéme partie du poids de la rouë, à la force cherchée. Donc quoique le frottement ſoit toujour égal à une partie déterminée de la preſſion, il eſt pourtant poſſible, qu'il puiſſe être vaincu par une force auſſi petite qu'on voudra: car on voit que plus on diminuë l'epaiſſeur de l'axe, ou ſon rayon BC, plus petite deviendra auſſi la force requiſe pour vaincre le frottement. Par là on comprendra aiſément combien il eſt important dans toutes ſortes de machines de rendre les axes, autour deſquels ſe fait le mouvement, auſſi minces qu'il ſera poſſible. Car dés qu'on pourroit reduire l'epaiſſeur des axes à la moitié, on gagneroit déjà la moitié de force, dont on avoit beſoin auparavant pour vaincre le frottement. Il eſt bien vrai que cette diminution n'eſt pas dans notre pouvoir, & qu'il faut regler l'epaiſſeur des axes ſur la charge, qu'ils doivent porter; mais il ſemble pourtant qu'on pourroit encore conſiderablement gagner de ce coté-cy, dans la pluspart des machines, où le frottement ſe réduit dans le mouvement des axes.

IV. Mais il faut bien remarquer, que la force AP, quoique je l'aye ſuppoſée horizontale, altére néantmoins la quantité du frottement, en changeant la preſſion de l'axe ſur le ſoutien ou l'appuy EBF. Car par l'action de la force AP le point d'appuy ſera transporté de B vers E & la preſſion deviendra égale à la force qui réſulte de la compoſition du poids de la rouë & de la force AP, quoique ce changement ne ſoit pas pour la pluspart conſiderable. Cependant pour mieux développer la maniere, dont la force mouvante entre à changer le frottement, je conſiderai le cas où la force $MP = F$ agit ſous une obliqui- Fig. 2.

obliquité quelconque. Pour cet effet soit ACB la ligne verticale, qui passe par le centre C de la rouë & de son axe, qui est soutenu par l'appuy immobile EF qui reçoit parfaitement une portion de l'axe. Soit CM le rayon auquel est appliquée la force $MP = F$ à angle droit CMP; & que P exprime le poids de la rouë avec l'axe. Pour trouver la force, qui résulte de la composition de ces deux forces F & P ensemble, je les considere l'une & l'autre appliquées en C comme au centre du mouvement, & ayant tiré CK perpendiculaire à CM soit $CB : CK = P : F$: & la diagonale CL du parallelogramme CBLK exprimera la force, dont la rouë sera sollicitée & apprimée contre le soutien au point N. Qu'on nomme l'angle $ACM = \varphi$, & on trouvera la force $CL = \sqrt{(PP + FF + 2PF \sin \varphi)}$; & pour l'obliquité de cette force ou l'angle BCN, on fera: comme CL est au sinus de l'angle CBL ou au cosinus de φ, ainsi BL ou CK au sinus de l'angle BCN, d'où l'on tirera $\sin BCN = \frac{BL \cos \varphi}{CL}$

$$= \frac{F \cos \varphi}{\sqrt{(PP + FF + 2PF \sin \varphi)}},$$ & ensuite la tangente de l'angle BCN sera $= \frac{F \cos \varphi}{P + F \sin \varphi}$.

V. Ces formules donneront lieu à plusieurs reflexions: je commencerai par la recherche, de quelle grandeur doit être la force $MP = F$, afin qu'elle puisse contrebalancer le frottement. Puisque le *moment* de cette force est $= F.\ CM = F.\ CA$ & celui du frottement $= \mu.\ CB.\ \sqrt{(PP + FF + 2PF \sin \varphi)}$, parce que le frottement même au point N est à la pression qui vient d'être trouvée $= \sqrt{(PP + FF + 2PF \sin \varphi)}$, comme μ à 1, la machine ne sauroit être mise en mouvement, à moins qu'il ne soit $F.\ CA > \mu\ CB \sqrt{(PP + FF + 2PF \sin \varphi)}$. Donc le frottement sera contrebalancé, si ces deux *moments* seront egaux entr'eux. Soit $CA = a$, & $CB = b$, & prenant les quarrés nous aurons $aaFF = \mu\mu bbPP + \mu\mu bbFF + 2\mu\mu bbPF \sin \varphi$, d'où nous tirerons:

$F =$

$$F = \frac{\mu b P\ (\mu b \sin\phi \pm \sqrt{(aa - \mu\mu bb. \cos\phi^2)})}{aa - \mu\mu bb}.$$

Ici l'ambiguïté du figne radical ne peut avoir lieu, qu'entant que la valeur de F devient affirmative: car, puisque nous avons fuppofé que le mouvement fe fait dans le fens NB, & que la direction de la force du frottement eft NQ, cette fuppofition ne peut avoir lieu, que lorsque la valeur de F eft affirmative. Au refte on voit bien, que cette ambiguité refulte du figne radical dans l'équation primitive, $aF = \mu b \sqrt{(PP + FF + 2PF \sin\phi)}$, qui malgré fa nature ne reçoit dans notre cas, que le figne +. Car le mouvement de la machine, dés qu'elle en aura, fera acceleré par le *moment* $aF - \mu b \sqrt{(PP + FF + PF \sin\phi)}$, où l'on comprend aifément, que le dernier membre ne peut jamais devenir affirmatif, puisque le frottement ne fauroit jamais augmenter l'effet de la force follicitante, mais il lui eft plutot toujours contraire. Par conféquent, toutes les fois qu'on aura quelque doute fur l'ambiguité de la valeur de F, on n'aura qu'à l'introduire dans la formule $aF - \mu b \sqrt{(PP + FF + 2PF \sin\phi)}$ pour voir fi elle devient égale à zero.

VI. Pour rendre cette formule plus fimple foit $\frac{a}{\mu b} = \frac{AC}{\mu BC} = n$, de forte que dans l'hypothefe $\mu = \frac{1}{4}$ on ait $n = \frac{4AC}{BC}$, & alors la force MP = F requife pour vaincre le frottement fera $F = \frac{\sin\phi \pm \sqrt{(nn - \cos\phi^2)}}{nn - 1} P$, valeur qui réfulte de l'equation : $nF - \sqrt{(P^2 + F^2 + 2PF \sin\phi)} = 0$, d'où nous aurons pour le point d'appuy N, $\sin BCN = \frac{\cos\phi}{n}$. Le cas le plus ordinaire eft quand le rayon de la roüe AC eft plus grand que le rayon de l'axe PC, & dans ce cas la valeur de la lettre n, étant plus grande que 4. & à plus forte raifon celle de nn plus grande que 16, il y aura à peu prés $\sqrt{(nn -}$

$\cos\phi^2) = n - \frac{\cos\phi^2}{2n}$, d'où l'on voit que dans ce cas ce n'est que le signe $+$ qui puisse avoir lieu: donc nous aurons $F = \frac{n + \sin\phi - \frac{1}{2n}\cos\phi^2}{nn - 1}P$. De là il suit *1mo* si l'angle $ACM = \phi$ devient 0° ou 180°, on aura la force requise pour vaincre la résistance du frottement $F = \frac{n - \frac{1}{2n}}{nn - 1}P$ ou $F = (\frac{1}{n} + \frac{1}{2n^3})P$, & pour le point d'appuy N, $\sin BCN = \pm\frac{1}{n}$ de sorte que cet angle sera très petit. *2do* Si l'angle $ACM = \phi = 90°$, nous aurons la force $F = \frac{n + 1}{nn - 1}P = \frac{1}{n - 1}P = (\frac{1}{n} + \frac{1}{nn} + \frac{1}{n^3})P$, & dans ce cas la force requise à vaincre le frottement sera la plus grande, puisque toute la force est emploiée à augmenter la présion, & dans ce cas le point d'appuy sera au point B. *3tio* Si l'angle $ACM = \phi = -90°$, ou que la force tire de l'autre coté en haut, on aura $F = \frac{n - 1}{nn - 1}P = \frac{1}{n + 1}P = (\frac{1}{n} - \frac{1}{nn} + \frac{1}{n^3})P$, & dans ce cas la force requise à vaincre le frottement sera la plus petite. De là on voit qu'on gagnera toujours, si l'on applique les forces pour tourner les roues, ensorte qu'elles soient dirigées en haut comme mp, & cet avantage sera d'autant plus grand, plus l'axe de la roüe sera epais.

VII. Le cas que nous venons de considérer aura lieu, quand même le rayon de l'axe BC deviendra égal à l'axe de la roüe AC, ou qu'il le surpasse, pourvûque la valeur de $n = \frac{4AC}{BC}$, ou plutot de son

Fig. 3.

quarré

quarré, ſoit encore conſidérablement plus grande que l'unité. Mais ſi nous ſuppoſons que le rayon de l'axe BC ſurpaſſe tant l'axe de la roüe CA, que la valeur de $n = \frac{4AC}{BC}$ n'excede l'unité que fort peu, les phenomenes qui en réſultent, doivent être dévelopés ſeparément. Car quoique ce cas ne trouve presque jamais lieu dans les machines, il merite pourtant toute l'attention, à cauſe des proprietés aſſez étranges, qui ſerviront à mieux connoitre les effets du frottement. Soit donc le rayon de l'axe CB, qui doit tourner dans la cavité de l'appuy EF, presque 4 fois plus grand que le rayon de la roüe CM, auquel eſt appliquée la force MP $=$ F, de ſorte que la valeur de $nn - 1$ ſoit trés petite; ou ſuppoſant $n = 1 + \alpha$, que α ſoit une fraction trés petite, & nous aurons pour vaincre le frottement $F = \frac{\sin\phi \pm \sqrt{(\sin\phi^2 + 2\alpha + \alpha\alpha)}}{2\alpha + \alpha\alpha}P$, où il n'y a encore que le ſigne + qui puiſſe avoir lieu, & pour le point d'appui N, nous aurons $\sin BCN = \frac{\cos\phi}{1+\alpha}$.

1mo Soit l'angle $ACM = \phi = 0$ ou $180°$, & nous aurons $F = \frac{P}{\sqrt{(2\alpha + \alpha\alpha)}}$, & partant la force requiſe pour vaincre la réſiſtance du frottement, doit être extrémement grande, & l'angle BCN deviendra presque droit, de ſorte que dans ce cas la cavité du ſoutien EF doit embraſſer presque la moitié de l'axe.

2do Si l'angle $ACM = \phi = 90°$, nous aurons $F = \frac{2+\alpha}{2\alpha+\alpha\alpha}P = \frac{P}{\alpha}$ & partant dans ce cas la force requiſe à vaincre le frottement, doit être encore plus grande.

3tio Si l'angle $ACM = \phi = -90°$, il y aura $F = \frac{\alpha}{2\alpha + \alpha\alpha}$

 P =

$P = \frac{P}{2 + \alpha}$, & dans ce cas il ne faudra pour vaincre le frottement qu'une force qui vaudra environ la moitié du poids de la machine P, & dans ces deux derniers cas le point d'appuy sera au point B.

VIII. De là il est clair, que si $\alpha = 0$, ou que le rayon de la roüe C A soit exactement au rayon de l'axe CB, comme la force du frottement est à la presion, ou que dans l'hypothese $\mu = \frac{1}{4}$ il soit CB $= 4$ CA: la force requise pour vaincre la résistance du frottement deviendra infiniment grande, toutes les fois que la force MP est horizontale, ou dirigée en bas, comme la figure représente. Et partant dans ces cas il ne sera pas même possible de remuër la machine, quelque force qu'on y emploie. Mais si l'on applique la force mp de l'autre coté, de sorte qu'elle soit dirigée en haut, puisqu'elle diminuera la presion de l'axe contre l'appuy, une force finie deviendra suffisante à surmonter la résistance du frottement. Pour cet effet nommant l'angle negatif $ACm = \Phi$, nous aurons la force $mp = F = \frac{\sqrt{(\sin\Phi^2 + 2\alpha + \alpha\alpha)} - \sin\Phi}{2\alpha + \alpha\alpha} P$, dont la valeur supposant $\alpha = 0$, sera $F = \frac{P}{2\sin\Phi}$: ou la force requise $mp = F$ sera à la moitié du poids de la machine ($\frac{1}{2}$P), comme le sinus total est au sinus de l'angle ACm. Par conséquent la plus petite force capable de vaincre la résistence du frottement dans ce cas, sera égale à la moitié du poids de la machine, & cette force doit être tellement appliquée à la roüe, qu'elle tire directement en haut. En voicy donc un cas qui nous fait voir l'important avantage, qu'on peut tirer de l'application de la même force à la roüe, quoiqu'elle agisse toujours perpendiculairement au rayon de la roüe: circonstance qui ne seroit d'aucune conséquence, s'il n'y avoit point de frottement. Il est encore bien remarquable que dans ce cas il peut arriver, que même une force infinie n'est pas capable de vaincre la résistance du frottement.

IX. A plus forte raison on comprendra aisement, que si le rayon de l'axe CB sera encore plus grand par rapport au rayon de la roüe CA,

C A, cette machine ne pourra être mise en mouvement par aucune force, dont la direction est, ou horizontale, ou qui tend en bas. Ce cas aura lieu si $n < 1$. soit donc $n = 1 - \alpha$, & α une fraction plus petite que 1; & que ϕ marque l'angle A C m pris de l'autre coté de la roüe, de sorte que la force $mp = F$ soit dirigée en haut. Alors pour vaincre la résistence du frottement il foudra une force

$$F = \frac{\sqrt{(\sin\phi^2 - 2\alpha + \alpha\alpha)} - \sin\phi}{-2\alpha + \alpha\alpha}P = \frac{\sin\phi \pm \sqrt{(\sin\phi^2 - 2\alpha + \alpha\alpha)}}{2\alpha - \alpha\alpha}P.$$

Donc afin que cette force ne devienne pas imaginaire, il faut qu'il soit $\sin\phi > \sqrt{(2\alpha - \alpha\alpha)}$, ou $\sin\phi > (1 - nn)$, car tant que $\sin\phi$ sera moindre que $\sqrt{(2\alpha - \alpha\alpha)}$, il ne sera pas possible de vaincre la résistence. Soit donc pour déveloper ce cas $\sin\phi = \sqrt{(2\alpha - \alpha\alpha)}$ &

$F = \frac{P}{\sqrt{(2\alpha - \alpha\alpha)}}$ & l'acceleration étant proportionelle à $(1 - \alpha)$

$F - \sqrt{(PP + FF - 2PF\sin\phi)}$ deviendra $= \frac{(1-\alpha)P - P\sqrt{(1 - 2\alpha + \alpha\alpha)}}{\sqrt{(2\alpha - \alpha\alpha)}}$

$= 0$; ce sera donc le premier cas qu'il sera possible de vaincre la résistence. Mais il faut bien remarquer, que dans ce cas le mouvement de la machine n'est pas encore possible, car quoiqu'on augmente la force F au delà de $\frac{P}{\sqrt{(2\alpha - \alpha\alpha)}}$, la valeur de la formule $nF - \sqrt{(PP + FF - 2PF\sin\phi)}$ redevient negative, La raison en est, que dans ce cas la valeur de cette formule devient un *maximum*, & ce *maximum* même est $= 0$, d'où l'on voit que dans tous les autres cas, où F est ou plus grande, ou plus petite que $\frac{P}{\sqrt{(2\alpha - \alpha\alpha)}} = \frac{P}{\sqrt{(1 - nn)}}$, sa valeur qui exprime l'acceleration, doit être moindre que 0, & partant négative. Cela arrive si $\sin\phi = \sqrt{(1 - nn)}$, & $\cos\phi = n$: or si l'angle ϕ est plus petit, la valeur de $nF - \sqrt{(PP + FF - 2PF\sin\phi)}$ demeure toujours négative, quelque grande que soit la force F.

X. Or si $\sin\phi > \sqrt{(1 - nn)}$, la plus grande valeur de la formule $nF - \sqrt{(PP + FF - 2PF\sin\phi)}$ sera affirmative, ce qui est

une marque, que dans ces cas la machine peut être mise en mouvement, si la force F est prise d'une grandeur convenable: car si cette force est trop petite, ou trop grande, le mouvement deviendra également impossible. Il y aura donc des limites, entre le-quels la force F doit être comprise, afin qu'elle soit capable de mouvoir la machine, & ces limites sont representés par la double valeur de F, que nous venons de trouver, savoir remettant $1 - nn$ au lieu de $2\alpha - \alpha\alpha$

$$F = \frac{\sin\phi \pm \sqrt{(\sin\phi^2 - 1 + nn)}}{1 - nn} P.$$

& entre ces deux limites se trouve la valeu de la force F, qui produit la plus grande acceleration. Pour trouver cette valeur, supposons $\frac{F}{P} = z$, & l'acceleration sera réprefentée par cette formule $nz - \sqrt{(1 + zz - 2z\sin\phi)}$, & posant son differentiel $= o$, nous aurons, $n = \frac{z - \sin\phi}{\sqrt{(1 + zz - 2z\sin\phi)}}$, & partant $\sqrt{(1 + zz - 2z\sin\phi)} = \frac{z - \sin\phi}{n}$: donc l'acceleration la plus grande sera $= \frac{(nn - 1)z\sin\phi}{n}$.

Or l'équation precedente nous fournira $z = \sin\phi \pm \frac{n\cos\phi}{\sqrt{(1 - nn)}}$ où par rapport à l'ambiguité du signe $\pm$ il faut remarquer, que puisque $\sqrt{(1 + zz - 2z\sin\phi)} = \frac{z - \sin\phi}{n}$, la valeur de $z - \sin\phi$ doit toujours être affirmative, parce que le frottement qui est exprimé par la formule irrationelle $\sqrt{(1 + zz - 2z\sin\phi)}$ ne sauroit jamais devenir négatif. Donc il est clair que dans l'expression $z = \sin\phi \pm \frac{n\cos\phi}{\sqrt{(1 - nn)}}$ le seul signe $+$ peut avoir lieu, & que le terme $\frac{n\cos\phi}{\sqrt{(1 - nn)}}$ doit toujours être pris affirmatif, quoique même le $\cos\phi$ dévienne negatif: ou l'angle ACm plus grand qu'un droit.

XI. Ayant

XI. Ayant donc trouvé pour le cas de la plus grande acceleration $\ddot{z} = \text{fin}\,\phi + \frac{n\,\text{cof}\,\phi}{\sqrt{(1-nn)}} = \frac{F}{P}$, la plus grande acceleration même fera comme n fin $\phi - \text{cof}\,\phi.\ \sqrt{(1-nn)}$; d'où l'on voit que cette plus grande valeur eſt négative, tant que fin $\phi < \sqrt{(1-nn)}$, & elle évanouït préciſément, ſi fin $\phi = \sqrt{(1-nn)}$: mais ſi fin $\phi > \sqrt{(1-nn)}$, alors la plus grande valeur de l'acceleration ſera affirmatife; & elle deviendra encore la plus grande, ſi l'angle $ACm = \phi$ ſera droit; car alors le mouvement de la machine ſera le plus vite, ſi l'on prend $F = P$, auquel cas la presſion même, & partant le frottement, evanouït. Or dans ce cas où $\phi = 90°$, il y aura deux forces, qui contrebalanceront le frottement qui ſeront

$$F = \frac{1+n}{1-nn} P = \frac{P}{1-n} \ \&\ F = \frac{1-n}{1-nn} P = \frac{P}{1+n}$$

d'où il eſt evident, que ſi la force F eſt, ou plus petite que $\frac{P}{1+n}$, ou plus grande que $\frac{P}{1-n}$, la machine ne recevra aucun mouvement; & il ne ſera posſible d'imprimer aucun mouvement à la machine, à moins que la force F ne ſoit compriſe entre ces limites $\frac{P}{1+n}$ & $\frac{P}{1-n}$. On ſera peut être d'abord ſurpris, comme il puiſſe arriver qu'une plus grande force ne ſoit pas capable de remuër la machine, pendant qu'une ſorce plus petite, quoiqu'également appliquée, y eſt capable. Mais comme dans le cas $F = P$ la presſion à l'apuy eſt tout à fait détruite, il eſt clair que lorsque $F > P$ la presſion devenant negative, ſera transportée en haut, & pour cet effet il faut que l'axe de la machine entre dans un anneau, auquel l'axe ſera apprimé dans le ſommet b, car ſans cet anneau, qui ſert à retenir la machine, elle feroit enlevée en haut par la force $F > P$.

XII. Ces cas, que je viens de déveloper, ſont voir tres évidemment, combien les forces, qui agiſſent ſur la machine, contribuënt à augmenter, ou à diminuer la réſiſtence du frottement: & partant

tant, pour déterminer le frottement de chaque machine, il ne ſuffit pas d'avoir égard à la machine même, mais il faut auſſi bien conſidérer toutes les ſorces qui y ſont appliquées. Jusqu'ici je n'ai conſideré qu'une ſeule force dont la machine étoit ſollicitée: mais s'il y en a pluſieurs qui agiſſent enſemble, parmi lesquelles on doit comprendre la charge qui doit être levée, ou miſe en mouvement, la détermination du frottement n'en devient pas plus difficile. Soient appliquées à la
Fig 4. machine qui tourne autour du centre C, ſur le ſoutien E F, des forces quelconques PR, QS ſous quelque obliquité aux rayons CP & CQ que ce ſoit: & pour en déterminer l'effet ſur le frottement, on n'a qu'à conſidérer ces forces, comme ſi elles etoient appliquées immédiatement au centre C, afin de connoitre la presſion ſur le ſoutien EF au point d'appuy. Qu'on décompoſe donc chaque force en deux, dont l'une ſoit horizontale, l'autre verticale, & la force PR ſe reſoudra en Pp, Pr & la force QS en Qq, Qs: aux verticales on joigne le poids de la machine, & que CK repreſente la ſomme de toutes les forces verticales, & CI celle des forces horizontales. Enſuite la diagonale CI du parallelogramme rectangle CLLK, repréſentera la force totale, dont la machine ſera preſsée contre le ſoutien EF; & on trouvera le point d'appuy N, où cette force eſt appliquée. Donc ſi l'on nomme la ſomme de toutes les forces verticales avec le poids de la machine $CK = P$, la ſomme des forces horizontales $CI = Q$, la presſion contre le ſoutien au point N ſera $= \sqrt{(PP + QQ)}$ & partant le frottement $= \mu \sqrt{(PP + QQ)}$. De plus, pour connoitre le point d'appuy N, la tangente de l'angle BCN ſera $= \frac{Q}{P}$.

XIII. Aprés avoir déterminé en ſorte le frottement, qui réſulte, tant du poids de la machine, que des forces qui y agiſſent, on recherchera de la maniere ſuivante, ſi ces forces ſont capables de mettre la machine en mouvement. On accelerera les momens de toutes les forces, qui agiſſent ſur la machine, en multipliant chacune par ſa diſtance à l'axe C, autour duquel le mouvement ſe fait, & ayant égard ſi toutes ces ſorces agiſſent dans le même ſons ou non, on réduira dans

tous ces momens dans une somme, en ajoutant ceux qui agissent dans le même sens, & en ôtant ceux qui sont contraires. Soit S ce moment total, qui tend à tourner la machine dans le sens BN, & puisque le frottement, que nous venons de trouver $= \mu \sqrt{(PP + QQ)}$ est toujours contraire à la force mouvante, comme il est appliqué au point d'appuy N, son moment sera $= \mu . CN . \sqrt{(PP + QQ)}$. Par conséquent on n'aura qu'à regarder le moment S, qui résulte des forces, & ce moment $\mu\ CN . \sqrt{(PP + QQ)}$ du frottement: car tandis que S sera plus petit que $\mu . CN . \sqrt{(PP + QQ)}$, ou même égal, la machine demeurera en repos; & le moment S ne sera capable de produire aucun mouvement, à moins qu'il ne soit S plus grand que $\mu . CN . \sqrt{(PP + QQ)}$. Dans ce cas l'acceleration de la machine sera produite par l'excés du moment S sur le moment du frottement $\mu . CN . \sqrt{(PP + QQ)}$, & cet excés $S - \mu . CN . \sqrt{(PP + QQ)}$ étant divisé par le moment de l'inertie de toute la machine, donnera l'acceleration du mouvement rotatoire. Cela s'entend, lorsque la machine commence à être mise en mouvement: car aussitot que la machine, & par conséquent aussi les forces, qui agissent sur elle, sont dejà en mouvement; puisque alors la pression sur le soutien en est changée, le frottement ne sera plus le même, & dans ce cas la recherche du mouvement actuel demandera des régles particulieres, qui seront le sujet d'une dissertation particuliere sur cette matiere.

XIV. Je me borne donc ici uniquement à rechercher la force, dont on aura besoin pour vaincre le frottement; puisque cette connoissance sera déjà suffisante pour juger de l'effet de la plupart des machines, dont on se sert ordinairement. Et pour faire voir combien la résistance du frottement peut être diminuée, si l'axe de la machine est soutenu de deux poulies, je m'en vais examiner le cas, où l'axe BCb d'une machine quelconque repose entre deux poulies BD, & bd, en sorte que l'axe de la machine ne sauroit tourner, sans que ces poulies ne tournassent également, & qu'il n'arrivât aucun frottement dans les endroits B & b, où les poulies sont touchées de l'axe. Or je suppose que chacune de ces poulies ait son pignon DEF & def, soutenu chacun par son appuy immobile GH & gh, sur lequel cha- Fig. 5.

 que

que poulie tourne, & que tout le frottement soit transporté par ce moyen aux endroits, où les pignons des poulies s'appuyent sur leurs soutiens. Pour déterminer ce frottement soit premierement, p le poids de chaque poulie & P le poids de la machine même, qui doit être tournée autour de son axe CBb : & que AI represente la force $=$ F appliquée perpendiculairement au rayon A C, qui soit capable de vaincre le frottement ; laquelle devroit aussi entrer dans la détermination du frottement. Or puisqu'il est facile de prévoir, que cette force sera trés petite, à cause de la grande diminution du frottement, il sera permis de négliger cette force dans la recherche de la quantité du frottement. Soit donc C P la ligne verticale, qui représente le poids de la machine P, & supposant que les lignes CD & Cd soient également inclinées sur l'horizon, je nommerai les angles BCP $=$ b CP $= \phi$, & la force CP $=$ P etant décomposée selon les directions CB & Cb, donnera pour chacune de ces forces selon CB & Cb la force $= \frac{P}{2 \operatorname{cos} \phi}$. Par conséquent chaque poulie sera pressée de ce poids P de la machine contre son appuy dans la direction DE ou de par une force $= \frac{P}{2 \operatorname{cos} \phi}$, qui à ce qu'on voit sera d'autant plus grande, plus grand sera l'angle BCb.

XV. Or chaque poulie étant outre cela sollicitée par son propre poids p, dans la direction DF & df; puisque les angles EDF & edf sont $= \phi$, la force totale, dont chaque poulie est presée contre son appuy, sera $= \surd \left(pp + \frac{PP}{4 \operatorname{cos} \phi^2} + Pp\right)$, & partant le frottement, qu'il faut vaincre pour mettre chaque poulie en mouvement, sera $= \mu \surd \left(pp + Pp + \frac{PP}{4 \operatorname{cos} \phi^2}\right)$, la lettre μ marquant la partie de la pression, à laquelle le frottement est égal, & dont la valeur est à peu prés $= \frac{1}{4}$. Maintenant il est clair que pour vaincre le frottement de la poulie DEF, il faut appliquer au point B une force $= \frac{\mu \, DF}{BD}$

$\surd$ (pp

$\surd\left(pp + Pp + \frac{PP}{4\,\mathrm{cof}\,\Phi^2}\right)$, & une pareille force ſera requiſe au point b pour vaincre le frottement de l'autre poulie def, puiſque je ſuppoſe ces deux poulies parfaitement égales entr'elles. Donc ſi la force $AI = F$ eſt capable de vaincre ces frottemens, il faut que ſon *moment* par rapport au centre de mouvement C ſoit égal aux *momen* de ces deux forces, que nous venons de trouver, & partant nous aurons $F.\,CA = \frac{2\cdot\mu\,DF.\,BC}{BD}\surd\left(pp + Pp + \frac{PP}{4\,\mathrm{cof}\,\Phi^2}\right)$

ou $F = \mu\,\frac{BC}{AC}\cdot\frac{DF}{BD}\surd\left(4pp + 4Pp + \frac{PP}{\mathrm{cof}\,\Phi^2}\right)$. De là il eſt donc clair que, pour vaincre la réſiſtance du frottement d'une telle machine, la force requiſe F ſera d'autant plus petite, premierement plus le rayon de l'axe de la machine CB ſera petit; & enſuite plus l'axe des poulies ſera petit par raport à leur diametre; & enfin plus l'angle BCb ſera petit. Donc, puiſqu'il eſt dans notre pouvoir d'augmenter le rapport du rayon des poulies BD au rayon de leur axe DE trés conſiderablement, on comprendra aiſément, qu'on ſera en état de rendre par ce moyen la réſiſtance du frottement preſque inſenſible. Pour cet effet on gagnera auſſi conſidérablement, ſi l'on approche ces deux poulies enſemble autant qu'il ſera poſſible.

XVI. Si l'on pouvoit faire les axes qui ſoutiennent la machines, auſſi minces qu'on voudroit, la diminution du frottement n'auroit aucune difficulté: mais puiſque la groſſeur des axes doit être proportionnée à la charge qu'ils portent, les axes des poulies DF & df ſeront determinés par le poids de la machine. Car ſi nous ſuppoſons que le principal axe de la machine CB eſt déjà auſſi mince, que la charge le permet, puiſque les forces des axes de differente épaiſſeur ſont à peu prés comme les quarrés de leurs rayons, cette régle nous fournira cette proportion $CB^2 : DF^2 = P : \surd\left(pp + Pp + \frac{PP}{4\,\mathrm{cof}\,\Phi^2}\right)$.

Or nous pourrons ſans une erreur conſiderable négliger le poids des poulies p par rapport au poids de la machine même P, puiſqu'une

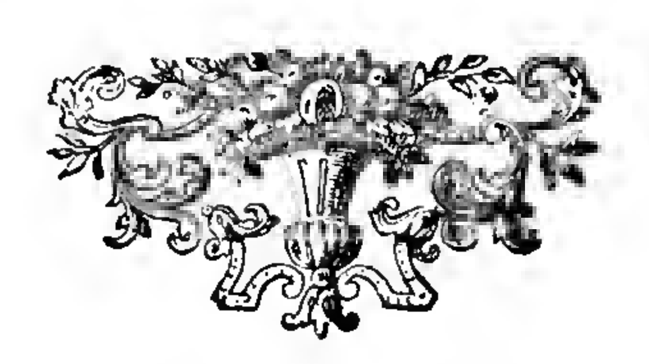
 trés

trés petite épaisseur peut suffire pour les poulies : & partant nous aurons CB : DF $= \sqrt{2 \cos \Phi} : 1$. & négligeant aussi dans la formule trouvée p à l'égard de P, pour vaincre la résistance du frottement, nous aurons : $F. CA = \frac{\mu P}{\cos \Phi} \cdot \frac{DF.\ BC}{BD} = \frac{\mu P.\ BC^2}{BD.\ \cos\Phi \sqrt{2 \cos \Phi}}$

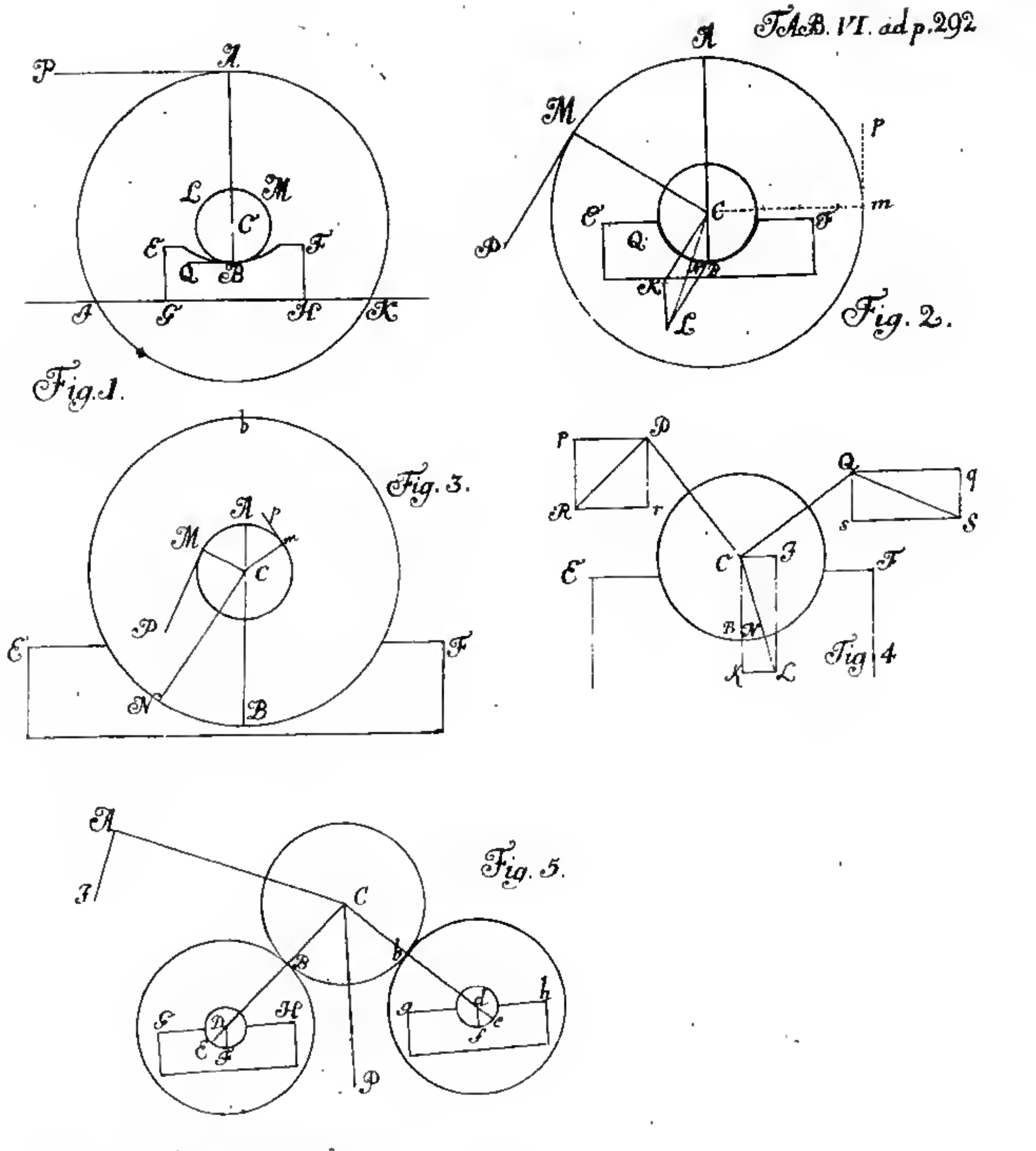
d'où il est clair que, plus on augmente la grandeur des poulies B D, plus aussi sera diminuée la résistence du frottement. Or les poulies ne peuvent être élargies que jusqu' à ce qu'elles viennent se toucher; ou bien le rayon B D ne peut être plus grand que CD sin Φ : soit donc BD $=$ CD sin Φ; ce qui donne BD $= \frac{BC \sin \Phi}{1 - \sin \Phi}$: & nous aurons :

$$F.\ CA = \frac{\mu P.\ BC.\ (1 - \sin \Phi)}{\sin \Phi \cos \Phi \sqrt{2 \cos \Phi}} = \frac{\mu P.\ BC \sqrt{(1 - \sin \Phi)}}{\sin \Phi \sqrt{2 \cos \Phi (1 + \sin \Phi)}}$$

or $\frac{\sqrt{(1 - \sin \Phi)}}{\sqrt{2 \cos \Phi}} = \frac{\sqrt{(1 - \sin \Phi)}}{\sqrt{2 (1 - \sin \Phi^2)^{\frac{1}{2}}}} = \sqrt[4]{\frac{1 - \sin \Phi}{4 (1 + \sin \Phi)}}$ par conséquent $F. CA = \frac{\mu P.\ BC \sqrt[4]{(1 - \sin \Phi)}}{\sin \Phi \sqrt[4]{4 (1 + \sin \Phi)^3}}$, d'où l'on voit que plus on augmente l'angle B C b, & que les poulies touchent la ligne verticale CP, plus aussi la résistence du frottement sera diminuée, sans que les axes, tant de la machine que des poulies, deviennent trop foibles.



RE-


Fig. 1.
P
A
L
M
C
E
F
Q
B
I
G
H
K
Fig. 2.
A
M
P
C
m
E
F
Q
D
K
L
Fig. 3.
b
A
M
p
m
C
P
E
F
N
B
Fig 4
D
P
R
r
Q
q
s
S
C
I
E
F
B
N
K
L
Fig. 5.
A
I
C
B
b
D
G
H
E
F
g
d
h
e
f
P